5/1

جامعة البعث		تحليل عقدي /١/		اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات   الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

- السؤال الأول: (١٠+١٠+١٠=٣٠درجة)

١"- أثبت أنَّ $\left[\dfrac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x + i\cos x}\right]^n = \cos n(x-\frac{\pi}{2}) + i\sin n(x-\frac{\pi}{2})$

٢"- أوجد الجذران التربيعيان للعدد العقدي $z=-15-i\,8$.

٣"- عين متى تكون الدالة $f(z)=z.\operatorname{Im} z$ قابلة للاشتقاق .

- السؤال الثاني : (١٠+١٠+١٠=٣٠درجة)

١"- عرّف الدالة $f(z)=\dfrac{|z|^2}{z}$ عند $z=0$ لتصبح مستمرة عند $z=0$.

٢"- اعتمادا" على الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $chz=4i$.

٣"- عبر عن العددين العقديين $z_1 = \pi e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_2=\tan(2i)$
بالشكل $a+ib$

- السؤال الثالث : (٢٠+٢٠=٤٠ درجة)

١"- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط
$z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=1$ فوق النقاط $w_1=-i$, $w_2=0$, $w_3=\infty$
على الترتيب ثمَ أوجد خيال $|z|=1$ وفق التحويلة الناتجة .

٢"- اعتمادا على صيغ تكامل كوشي أوجد قيمتي التكاملين الآتين

$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz \;,\; I_2=\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{2z^2-\pi z}dz$$

انتهت الأسئلة		*****************************

مدرس المقرر
د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية لمادة التحليل عقدي/١/ الفصل الثاني ٢٠١٦-٢٠١٧

مع سلم الدرجات

جواب السؤال الأول : (١٠+١٠+١٠=٣٠درجة)

١"- (15)

$$\frac{1+\sin x-i\cos x}{1+\sin x+i\cos x}=\frac{(1+\sin x-\cos x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x-2i\cos x(1+\sin x)-\cos^2 x}{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}\quad 3$$

$$=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x-1+\sin^2 x-2i\cos x(1+\sin x)}{2(1+\sin x)}=\frac{2\sin x(1+\sin x)-2i\cos x(1+\sin x)}{2(1+\sin x)}\quad 3$$

$$=\sin x-i\cos x=\cos(x-\frac{\pi}{2})+i\sin(x-\frac{\pi}{2})\quad 2$$

وبالتالي هعتمادا" على علاقة ديموافر يكون

$$\left[\frac{1+\sin x-i\cos x}{1+\sin x+i\cos x}\right]^n=\cos n\,(x-\frac{\pi}{2})+i\sin n(x-\frac{\pi}{2})\quad 2$$

(15)

٢" – نفرض $z=x+iy$ أحد الجذرين عندئذ

1+1+1 $z^2=x^2-y^2+i2xy=-15-i8\Rightarrow x^2-y^2=-15\quad(1)\qquad 2xy=-8\quad(2)$

1 من (2) نجد أنّ (3) $y=-\frac{4}{x}$ بتعويض (3) (1) نجد أنّ

1+1 $x^2-\frac{16}{x^2}=-15\Rightarrow x^4+15x^2-16=0\Rightarrow(x^2+16).(x^2-1)=0$ ومنه

1+1 إما $x^2+16=0$ مستحيلة وإما $x^2-1=0\Leftarrow x^2=1\Leftarrow x=\pm1$

1 من أجل $x=1\Leftarrow y=-4\Leftarrow z=1-i4$ أما من أجل

1 $x=-1\Leftarrow y=4\Leftarrow z=-1+i4$ وهما الجذران التربيعيان للعدد المعطى .

(15) ٣- بفرض أنّ $z=x+iy\Leftarrow f(z)=xy+iy^2$ " أي أنّ

$\frac{\partial u}{\partial x}=y\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y$ وهذه المشتقات موجودة ومستمرة

1 1 1 1 1

وحتى تكون الدالة قابلة للاشتقاق يجب أن يتحقق شرطا كوشي ريمان

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ ويكون هذان الشرطان محققان عند $z=0$ فقط .

جواب السؤال الثاني : (١٠+١٠+١٠=٣٠ درجة)

"١ – تكون الدالة مستمرة عند $z=0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to 0} f(z)=f(0)$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{x^2+y^2}{x+iy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-iy)=0+i0=0$$

أي أنّ

$$f(z)=\begin{cases}\frac{|z|^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

"٢- نعلم بأنّ $arcchz=\log(z+\sqrt{z^2-1})$ لذلك بما أنّ $chz=4i$ فأنّ

$$z=arcch(4i)=\log(4i+\sqrt{-16-1})=\log(4i\pm i\sqrt{17})$$

$$=Log\sqrt{17}\pm 4+i(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi)$$

"٣- اعتمادا" على صيغة أويلر فأنّ $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i1=i$

ومنه فأنّ

$$e^{\pi e^{\frac{\pi}{2}i}}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

كذلك فأنّ

$$\tan(2i)=\frac{\sin(2i)}{\cos(2i)}=\frac{i\,sh2}{ch2}=i\,th\,2$$

جواب السؤال الثالث : (٢٠+[illegible]=٤٠درجة)

"١ – التحويلة المطلوبة من الشكل $\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

نعوض عن كل w_3 بـ $\frac{1}{w_3}$ ونوحد امقامات ونختصر فنحصل على

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w.w_3-1}\cdot\frac{w_2w_3-1}{w}$$ بالتعويض نجد أنّ

$$\frac{w+i}{i}=\frac{z-0}{z-1}\cdot\frac{-i-1}{-i-0}\Rightarrow w=\frac{z+i}{z-1}$$ وهي التحويلة المطلوبة

من التحويلة السابقة نجد أنّ $z=\frac{w+i}{w-1}$ ومنه $|z|=\frac{|w+i|}{|w-1|}$ وبما أنّ $|z|=1$

فأنّ $|w+i|=|w-1| \Leftarrow \sqrt{(u-1)^2+v^2}=\sqrt{u^2+(v+1)^2}$ ومنه فأنّ

$u^2+v^2+2v+1=u^2-2u+1+v^2 \Leftarrow v=-u$ هوخيال $|z|=1$.

$$I_1=\int_{|z|=3/2}\frac{3z+1}{(z-1)^2.(z-2)}dz=\int_{|z|=3/2}\frac{\frac{3z+1}{z-2}}{(z-1)^2}dz=2i\pi\left[\frac{3z+1}{z-2}\right]'=2\pi i\left[\frac{-7}{z-2}\right]=-14\pi i$$

$$I_2=\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{z(2z-\pi)}dz=\int_{c_1}\frac{\frac{\sin z}{2z-\pi}}{z}+\frac{1}{2}\int_{c_2}\frac{\frac{\sin z}{z}}{z-\frac{\pi}{2}}dz=2\pi i\,0+2\pi i\frac{1}{2}\cdot\ldots$$

حيث c_1 دائرة تحيط بالنقطة $z=0$ نصف قطرها صغير بقدر كاف

و c_2 دائرة تحيط بالنقطة $z=\frac{\pi}{2}$ ونصف قطرها صغير بقدر كاف لكي يكون

$c_1\cap c_2=\phi$

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح